

NOCIONES DE LÓGICA FORMAL

Contenido: Proposiciones simples y compuestas, operaciones con proposiciones. Leyes o tautologías. Cuantificadores.

En toda definición, propiedad o demostración matemática es preciso que se conjuguen la claridad, la economía y sobre todo la eliminación de las ambigüedades del lenguaje ordinario, lo que se logra con la introducción de símbolos y conectivos. Se estudiará el concepto de proposiciones simples, operaciones con proposiciones que permitirá obtener proposiciones generales que se utilizarán a través del desarrollo de todo el tema.

PROPOSICIONES SIMPLES

Definición: Las proposiciones son oraciones declarativas a las cuales se puede definir si es verdadera o falsa, es decir que puede asociársele uno sólo de los siguientes valores: **Verdadera** (V) o **Falsa** (F).

Ejemplos:

1. Julio Bocca es escritor (F)
2. 8 es un número primo (F)
3. Existen infinitos puntos (V)
4. José es músico (V o F, se tendría que conocer a José.).

Estas son oraciones declarativas y por lo tanto: **Son Proposiciones**

Contraejemplos:

- ¿Qué hora es? -Interrogativa-
- ¡Salga de aquí! -Imperativa-
- Ojalá llueva mañana -Desiderativa-
- ¡Qué barbaridad! -Exclamativa-

Estas oraciones **no son proposiciones**.

Observación: Sean las siguientes oraciones declarativas:

- Romeo ama a Julieta
- Julieta es amada por Romeo

que si bien son diferentes desde el punto de vista gramatical, tienen el mismo significado, razón por lo cual se lo considerará como la misma proposición.

Así como en álgebra se usan letras para representar números, y de este modo escribir expresiones generales tales como $x + y = y + x$ (Cuyos casos particulares podrían ser: $2 + 1 = 1 + 2$; $3 + 5 = 5 + 3$;... etc.), también en lógica se usan letras ($p, q, r, s, \dots$) para representar proposiciones. De modo que tendrá sentido escribir: p = el conejo salta.

si p es una proposición y se quiere expresar su valor de verdad V o F, se escribe de la siguiente manera:

$V(p) = V$ si p es verdadera.

$V(p) = F$ si p es falsa.

Además de indicar los valores de verdad de una proposición con las letras V y F, se lo puede hacer también usando los números 1 (Verdadero) y 0 (Falso).

Conviene destacar que no compete a la lógica establecer el valor de verdad de las proposiciones.

Se considera al conjunto E como el conjunto de todas las posibles proposiciones del lenguaje como conjunto universal y se lo designa como el universo del discurso, cada proposición p pertenece a

E , o $p \in E$.



OPERACIONES CON PROPOSICIONES

Así como en aritmética y álgebra se estudian las operaciones entre números, en lógica se estudian las operaciones entre proposiciones.

A partir de proposiciones simples es posible generar proposiciones compuestas mediante símbolos los cuales son llamados como **conectivos lógicos**.

Cada uno de ellos permite definir una operación interna y cerrada en E , esto significa que la operación entre dos proposiciones, es otra proposición llamada **proposición compuesta**.

Las operaciones que se estudiarán son: negación, conjunción, disyunción, diferencia simétrica, implicación y doble implicación, unitaria la primera y binarias las restantes.

Conectivo	Operación Asociada	Significado	
		Se simboliza	Se lee:
$\sim$	Negación	$\sim p$	No p ; no es cierto que p
$\wedge$	Conjunción	$p \wedge q$	p y q
$\vee$	Disyunción	$p \vee q$	p o q (en sentido incluyente)
$\underline{\vee}$	Diferencia Simétrica	$p \underline{\vee} q$	p o q (en sentido excluyente)
$\Rightarrow$	Implicación	$p \Rightarrow q$	p implica q ; si p entonces q
$\Leftrightarrow$	Doble Implicación	$p \Leftrightarrow q$	p si y sólo si q

TABLAS DE VERDAD

Considerando los siguientes principios:

P_1 – Toda proposición es verdadera o falsa

P_2 – Los valores de verdad de un enunciado compuesto están determinados por los valores de verdad de los enunciados simples (proposiciones) que lo componen.

Con ayuda de estos dos principios se pueden construir las llamadas “TABLAS DE VERDAD”.

Por medio de ellas se determina, de un modo mecánico, la verdad o falsedad de un enunciado compuesto dados los valores de verdad de los enunciados simples que lo componen.

NEGACIÓN

Definición: Se llama negación lógica de la proposición “ p ” a la proposición que se obtiene anteponiendo a “ p ” el adverbio “no”

Negación de la proposición p es $no\ p$, notada por $\sim p$ o también $-p$ cuya tabla de valores de verdad es:

p	$-p$
V	F
F	V

De acuerdo con el uso corriente de la negación, parece claro que si P es V, su negación $\neg P$ es F. de acuerdo a ello se construye el cuadro de valores.

Se trata de una **operación unitaria**, pues a partir de una proposición se obtiene otra que es su negación.

Ejemplo: Sea la proposición p = todo hombre es honesto

$\neg p$: no todo hombre es honesto.

$\neg p$: no es cierto que todo hombre es honesto.

$\neg p$: existen hombres deshonestos.

Si : $V(p) = F$, entonces $V(\neg p) = V$

De acuerdo al uso corriente de la negación parece claro que si p es V, su negación $\neg p$ es F. de acuerdo a ello se construye el cuadro de valores de verdad que recibe el nombre de TABLA DE VALORES DE VERDAD DE LA NEGACIÓN. Además de indicar los valores de verdad de una proposición con las letras V o F, se puede hacerlo usando los números 1(Verdadero) y 0(Falso).

p	$\neg p$
1	0
0	1

CONJUNCIÓN

Se llama conjunción de la proposición “ p ” con la proposición “ q ”, a la que resulta de unir p con q mediante la conjunción “ y ”; empleando ésta con su sentido habitual en lenguaje corriente. Es una operación binaria y cerrada en el conjunto de las proposiciones.

La conjunción de dos proposiciones, p y q , es un enunciado compuesto, cuyo valor de verdad intuitivo es claro ya que será verdadero si tanto p como q son verdaderas.

Definición: Conjunción de las proposiciones p y q es la proposición $p \wedge q$ (p y q). Cuya tabla de valores de verdad es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$$V(p \wedge q) = V \text{ sólo cuando } V(p)=V \text{ y } V(q)=V$$

Ejemplo:

1) p = Juan es alto; q = Luís es alto; $p \wedge q$ = Juan y Luís son altos.

$$V(p \wedge q) = V \Leftrightarrow V(p) = V \text{ y } V(q) = V.$$

2) p = hoy es lunes; q = mañana es sábado; $p \wedge q$ = hoy es lunes y mañana es sábado.

$$V(p \wedge q) = F \text{ pues no coexisten } \begin{cases} V(p) = V \\ V(q) = V \end{cases}$$

Según se sabe, las proposiciones “ p ” y “ q ” pueden ser verdaderas o falsas independientemente; esto significa que las dos posibilidades de V o F de la proposición se combinan con las dos posibilidades de “ p ” y dos posibilidades de “ q ” igual a 4 ($2 \times 2 = 4$ posibilidades para $p \wedge q$); esto significa que una tabla de verdad para dos proposiciones tiene $2^2 = 4$ filas.

Si se tiene “ n ” proposiciones, el número de filas, estará dado por 2^n , es decir, dos elevado a la cantidad de proposiciones dados.

Ejemplo:

Dados tres proposiciones, p , q y r realizar la tabla de verdad de sus conjunciones.

en este caso el número de filas estará dado por:

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ filas}$$

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge q \wedge r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	F	F
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

$$V(p \wedge q \wedge r) = V \text{ sólo cuando } V(p) = V, V(q) = V \text{ y } V(r) = V$$

Las expresiones “pero”, “sin embargo”, “también” y “aunque”; usadas para unir dos proposiciones, tienen el mismo sentido conjuntivo de “y”, y pueden, por lo tanto, ser representados por el símbolo conjuntivo $\wedge$.

También es conveniente señalar que no todo de “y” puede interpretarse como el conectivo conjuntivo.

Ejemplo: “Newton y Leibniz fueron contemporáneos”.

DISYUNCIÓN

La expresión "o" es ambigua en el lenguaje corriente, es usada en el sentido excluyente e incluyente.

Pero desde el punto de vista lógico, es decir cuando no es interesante el contenido de la proposición sino exclusivamente interesa su valor de verdad, se tienen dos sentidos y símbolos diferentes.

Se llama disyunción de la proposición "p" con la proposición "q" a la que resulta de unir p con q mediante la disyunción "o".

La relación establecida entre dos proposiciones por la disyunción "o" no están claras, ya que en el lenguaje corriente no tiene un significado preciso y único. Si se analiza sus dos significados se tiene:

- a) puede significar: o "p" o "q" o "ambas" simultáneamente, es decir, cuando "o" se une en el sentido y/o. en este caso se dice que la disyunción es INCLUSIVA O INCLUYENTE. Su símbolo es: $\vee$.

Ejemplo:

p: María estudia; q: Laura estudia

$p \vee q$: María estudia o Laura estudia

lo que significa que María estudia o que Laura estudia, o bien que ambas estudias.

- b) Puede significar o "p" o "q" pero "no ambas" simultáneamente, en este caso se dice que la disyunción es EXCLUSIVA O EXCLUYENTE. Su símbolo es $\veebar$.

Ejemplo:

P: hoy es lunes; q: Hoy es martes

$P \veebar q$: Hoy es lunes o es martes.

Se comprende que hoy puede ser lunes o martes pero no ambas cosas al mismo tiempo.

Cuando se leen las oraciones de los ejemplos, se comprende lo que se quiere decir, por el sentido general de la frase, pero desde el punto de vista lógico, es decir, cuan interesa exclusivamente el valor de verdad o falsedad y no el contenido de las proposiciones, es indispensable usar dos símbolos diferentes para indicar las dos interpretaciones de la disyunción, $\vee$ (disyunción) y $\veebar$ (exclusiva).

Se analiza ahora a través de las tablas de verdad.

DISYUNCIÓN INCLUYENTE

Al decir $p \vee q$ se está afirmando que son verdaderas p (no importa que sea falsa q), o q (no importa que sea falsa p) o ambas simultáneamente. Esto quiere decir que $p \vee q$ es verdadera si p o q o ambas son verdaderas. En cambio $p \vee q$ es falsa si p y q son simultáneamente falsas.

Definición: disyunción de las proposiciones p y q es la proposición $p \vee q$ en sentido excluyente, cuya tabla de verdad es:



p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$$V(p \vee q) = F \text{ sólo si } V(p) = F \text{ y } V(q) = F$$

Ejemplo:

p= Juan es alto

q= Pedro es alto

$p \vee q$ =Juan o Pedro son altos.

$V(p \vee q) = F$ sólo si Juan y Pedro son bajos, es decir $V(p) = F$ y $V(q) = F$, o bien p, o bien q, o bien ambas.

DIFERENCIA SIMÉTRICA O DISYUNCIÓN EXCLUYENTE

$p \underline{\vee} q$

significa o bien p o bien q pero no ambas simultáneamente. Por lo tanto la disyunción exclusiva será verdadera si p es verdadera y q es falsa, o si q es verdadera y p es falsa, pero no cuando ambas tengan el mismo valor de verdad.

Definición: Diferencia simétrica o disyunción excluyente de las proposiciones p y q es la proposición $p \underline{\vee} q$. Resulta ser la proposición $p \vee q$ en sentido excluyente.

p	q	$p \vee q$	$p \underline{\vee} q$
V	V	V	F
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F

$$V(p \underline{\vee} q) = V \text{ sólo si } V(p) \neq V(q)$$

Ejemplo:

p= hoy a las 18 hs. vamos a clase.

q= hoy a las 18 hs. vamos a cazar.

$p \underline{\vee} q$ = hoy a las 18 hs. vamos a clase o a cazar.

$V(p \underline{\vee} q) = V$ sólo si $V(p) \neq V(q)$ significa o bien p, o bien q, pero no ambas

IMPLICACIÓN MATERIAL (CONDICIONAL) E IMPLICACIÓN FORMAL

Suponiendo que no se desea hacer una afirmación categórica, sino más bien una afirmación que contenga, como indican los siguientes ejemplos:

- a) Si el tiempo es bueno daré un paseo
- b) Si el siguiente enunciado es verdadero, entonces puedo demostrar el teorema.

Cada uno de estos enunciados es de la forma:

Si p entonces q , llamado condicional, el cual es un nuevo conectivo al cual se lo simboliza con el signo $\rightarrow$

En la expresión $p \rightarrow q$, p recibe el nombre de ANTECEDENTE y q el de CONSECUENTE.

Si se construye la tabla de verdad, las dos primeras filas se pueden completar fácilmente pues si $V(p)=V$ y $V(q)=V$ entonces $p \rightarrow q$ es verdadera, y si $V(p)=V$ y $V(q)=F$, entonces $p \rightarrow q$ es falsa.

Las dos últimas filas de la tabla se completan estableciendo que $p \rightarrow q$ es verdadera siempre que p sea falsa, independientemente del valor de verdad de q .

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejemplo:

Si apruebo el examen entonces te presto el libro de álgebra.

Este enunciado puede parecerse o pensarse como un compromiso condicionado por p y se puede asociar su verdad o falsedad al cumplimiento o no del compromiso.

Hasta aquí se ha considerado en forma aislada los enunciados p y q , sin embargo pueden considerarse las relaciones existentes entre un par de enunciados cuando uno implica lógicamente al otro.

Si p implica q se dice también que q se sigue de p o que q se deduce de p .

Por ejemplo: en cualquier teorema matemático la hipótesis implica la tesis.

Se puede caracterizar la implicación del siguiente modo: p implica q si q es verdadero en todos los casos lógicamente posibles en que p es verdadera. Se niega así la posibilidad lógica de que la proposición p , siendo verdadera, implique q falsa.

La relación de implicación tiene una estrecha afinidad con el enunciado condicional, pero no se debe confundirlas.

- I- El Condicional: ($p \rightarrow q$) es un nuevo enunciado construido a partir de dos enunciados dados, también llamado IMPLICACIÓN MATERIAL. Es una proposición y su tabla de verdad, como ya se vio anteriormente, contiene V y F.
- II- La Implicación: ($p \Rightarrow q$) es una relación entre dos enunciados, también llamada IMPLICACIÓN FORMAL, y la proposición $p \Rightarrow q$ sólo tiene letra V en su tabla de verdad.

Luego se puede decir: $p \Rightarrow q$ si y sólo si el condicional $p \rightarrow q$ es lógicamente verdadero, o sea una tautología, cuando es verdadero en todos los casos verdaderos.

Ejemplo:

“Hoy es lunes entonces mañana es martes” es la implicación de las proposiciones

p : Hoy es lunes

q : mañana es martes

La implicación en este caso es siempre verdadera porque no puede darse el caso de que q sea falso y p verdadero, entonces es lógicamente verdadero.

En matemática la relación de implicación se usa como método de demostración y en ese caso $p \Rightarrow q$ Significa “ q se deduce lógicamente de p ”.

IMPLICACIÓN CONDICIONAL

En este caso presentado para los chicos de 3º polimodal, se entenderá la implicación condicional y formal como una sola desde la siguiente...



Definición: implicación de las proposiciones p y q es la proposición $p \Rightarrow q$ (p implica q , o bien si p entonces q).

p se llama Antecedente de la implicación.

q se llama Consecuente de la implicación.

La tabla de valores es la siguiente:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$V(p \Rightarrow q) = F$ sólo si $V(p)=V$ y $V(q)=F$, es decir la implicación es falsa cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso.

Ejemplo:

p = gano la quiniela

q = te invito un asado

$p \Rightarrow q$ si gano la quiniela entonces te invito un asado.

Se puede pensar como un compromiso, condicionado por " p ", y se puede asociar la verdad de $p \Rightarrow q$ al cumplimiento del compromiso. Si $V(p)=V$ y $V(q)=F$ el compromiso no se cumple y la proposición $p \Rightarrow q$ es falsa.

Si $V(p)=F$ quedo liberado del compromiso, puedo o no invitarte al asado y la proposición $p \Rightarrow q$ es verdadera.

DOBLE IMPLICACIÓN O BICONDICIONAL

El bicondicional $p \Leftrightarrow q$ se lee: " p si y sólo si q " y afirma que si p es verdadero entonces q es verdadero, y si p es falso entonces q es falso.

Definición: Doble implicación de las proposiciones p y q es la proposición $p \Leftrightarrow q$ (p si y sólo si) cuya tabla de valores de verdad es.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

$V(p \Leftrightarrow q) = V$ sólo si $V(p) = V(q)$

Si el condicional es no sólo verdadero, sino lógicamente verdadero entonces esto establece una relación entre p y q .

Dado que $p \Leftrightarrow q$ es verdadero en todos los casos lógicamente posibles, los enunciados p y q tienen el mismo valor de verdad en cada uno de estos casos. Cuando así ocurre se dice que p y q son lógicamente equivalentes.

Ejemplo:

p : "El triángulo abc es equilátero"

q : "El triángulo abc es equiángulo"

$p \Leftrightarrow q$: "El triángulo abc es equilátero si y sólo si es equiángulo."

Como $p \Leftrightarrow q$ es equivalente a " $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ " se puede deducir su tabla de verdad en función de las tablas de $\wedge$ y $\Rightarrow$; es decir, la doble implicación puede definirse también como la conjunción de una implicación y su recíproca.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Ejemplo:

p = ABC es un triángulo.

q = ABC tiene tres lados.

$p \Leftrightarrow q$ ABC es un triángulo si y sólo si tiene tres lados.

Aquí sucede lo siguiente:

" p es condición necesaria y suficiente para q "

" q es condición necesaria y suficiente para p "

reuniendo las operaciones en una tabla se tiene.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \vee \neg q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F
F	F	F	F	F	V	V

CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE

Ejemplo:

p : "x es múltiplo de 6"

q : "x es múltiplo de 2"

se considera la implicación $p \Rightarrow q$, que, en este caso, es verdadera.

La condición de ser múltiplo de 6 es condición suficiente para afirmar que el número sea múltiplo de 2. Por lo tanto p es condición suficiente para q .

Para que el número sea múltiplo de 6 es condición necesaria para que el número sea múltiplo de 2.
Por lo tanto q es condición necesaria para p .

- Si 12 es múltiplo de 6 entonces es múltiplo de 2.

Se entiende que 12 es múltiplo de 2 con sólo decir que es múltiplo de 6.

- Pero para que 12 sea múltiplo de 6, necesariamente debe ser múltiplo de 2.

En la implicación simple, el antecedente es condición suficiente para el consecuente, y el consecuente es condición suficiente para el antecedente.

Para el bicondicional, tanto el antecedente como el consecuente son condiciones necesarias y suficientes.

Para indicar que p es condición suficiente para q , se expresa así: $p \rightarrow q$.

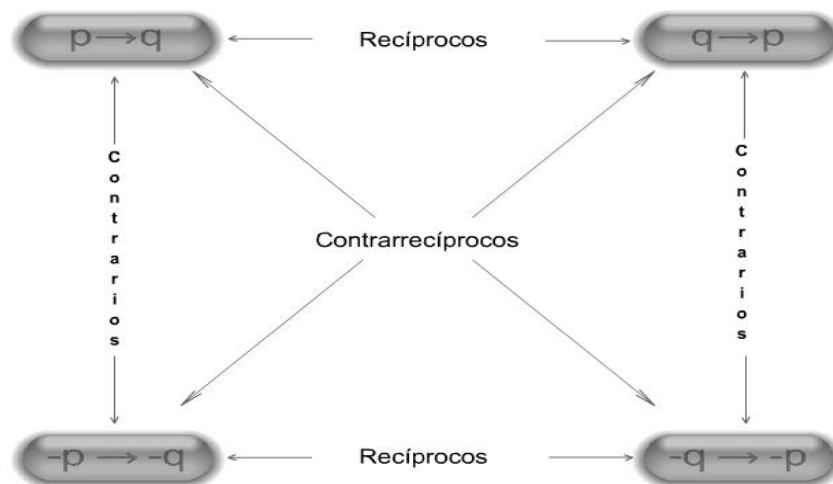
Para indicar que q es condición necesaria para p , expresa así: p sólo si q .

IMPLICACIONES ASOCIADAS

Dado el condicional $p \rightarrow q$ al que se lo llama DIRECTO, se puede obtener a partir del mismo, otros enunciados al permutar y/o negar el antecedente y el consecuente.

Estas implicaciones se llaman CONJUGADAS o ASOCIADAS y cualquiera de ellas puede tomarse como directo.

Las relaciones que vinculan a estas implicaciones se pueden visualizar en el siguiente cuadro:



Construyendo la tabla de verdad de estos enunciados se tiene:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\neg p \rightarrow \neg q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V

Se ve aquí que las implicaciones contrarrecíprocas son equivalentes, es decir que la verdad del directo implica la verdad del contrarrecíproco, pero no implica la verdad del contrario ni del recíproco.

LEYES LÓGICAS

Tautología o Ley Lógica: es una proposición compuesta cuyo valor de verdad es siempre verdadero cualquiera sean los valores de verdad de las proposiciones simples que combinan. Se abrevia "To".

Contradicción: es una proposición compuesta cuyo valor de verdad es siempre falso cualquiera sean los valores de verdad de las proposiciones simples que combinan. Se abrevia "**Fo**".

Contingencia: un enunciado compuesto es una contingencia cuando es, a veces verdadero, y a veces falso.

Leyes o tautologías: su demostración se reduce a la confección de la tabla de valores de verdad. Cualesquiera sean las proposiciones p, q, r , se verifican las siguientes leyes:

- **LEY DE DOBLE NEGACIÓN O INVOLUCIÓN:**

Negación de la negación: $\sim(\sim p) = p$

- **LEYES CONMUTATIVAS:**

Conmutativa de la conjunción: $p \wedge q = q \wedge p$

Conmutativa de la disyunción: $p \vee q = q \vee p$

- **LEYES ASOCIATIVAS:**

De la conjunción: $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$

De la disyunción: $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$

- **LEYES DISTRIBUTIVAS:**

De la conjunción con respecto a la disyunción:

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

De la disyunción con respecto a la conjunción:

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

- **LEYES DE DE MORGAN:**

La negación de una conjunción es equivalente a la disyunción de las negaciones:

$$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

La negación de una disyunción es equivalente a la conjunción de sus negaciones:

$$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$$

- **LEYES IDEMPOTENTES:**

En la conjunción: $p \wedge p \Leftrightarrow p$

En la disyunción: $p \vee p \Leftrightarrow p$

- **LEYES DE IDENTIDAD:**

La disyunción de un enunciado simple y una proposición cuyo valor de verdad es falso, es decir una falsedad, es equivalente al mismo enunciado simple.

$$p \vee \text{Fo} \Leftrightarrow p$$

La conjunción de un enunciado simple y una proposición cuyo valor de verdad es una tautología, es siempre el mismo valor de p .

$$p \wedge \text{To} \Leftrightarrow p$$



- **LEYES INVERSAS:**

De la disyunción: $p \vee \sim p \Leftrightarrow \text{To}$

De la conjunción: $p \wedge \sim p \Leftrightarrow \text{Fo}$

- **LEYES DE DOMINACIÓN:**

De la disyunción: $p \vee \text{To} \Leftrightarrow \text{To}$

De la conjunción: $p \wedge \text{Fo} \Leftrightarrow \text{Fo}$

- **LEYES DE ABSORCIÓN:**

$$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$$

$$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$

- **LEY DE LA NEGACIÓN DE LA IMPLICACIÓN**

$$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$$

- **LEY DE LA REDUCCIÓN DE LA IMPLICACIÓN**

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$$

RAZONAMIENTO DEDUCTIVO VÁLIDO

a) **Ley de modus ponens:** Si p y $(p \Rightarrow q)$ entonces q .

La notación clásica es

$$\frac{p \quad p \Rightarrow q}{q}$$

b) **Ley de modus tolem**

$$\frac{p \Rightarrow q \quad \sim q}{\sim p}$$

Este esquema es la notación clásica del condicional $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$

c) **Ley de silogismo hipotético**

$$\frac{p \Rightarrow q \quad q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}$$

Es decir, la proposición $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ es una tautología.

FUNCIONES PROPOSICIONALES

Sea x un objeto determinado perteneciente a un cierto conjunto. Se llama a x variable o indeterminada.

El símbolo $P(x)$ representa una propiedad relativa a indeterminada x .

Ejemplo:

$x \in N$; $P(x)$: x es primo

Esta expresión se llama función proposicional en una variable.

Como puede verse no es una proposición, pues a menos que se especifique x , nada se puede decir acerca de su valor de verdad. Pero para cada especificación de x , la función proposicional se transforma en una proposición.

Definición: Función proposicional en una variable o indeterminada x es toda oración en la que figura x como sujeto, la cual se convierte en proposición para cada especificación de x .

$$x \in N \begin{cases} p(x): x \text{ es primo (función proposicional)} \\ p(5): 5 \text{ es primo (Proposición verdadera)} \\ p(6): 6 \text{ es primo (proposición falsa)} \end{cases}$$

Las funciones proposicionales pueden ser de una o más variables. Por ejemplo:

$P(x, y)$: “ x es el divisor de y ” (función proposicional).

$P(5, 10)$: “5 es el divisor de 10” (proposición V).

$P(2, 7)$: “2 es el divisor de 7” (proposición F).

A partir de las funciones proposicionales se pueden obtener proposiciones generales, mediante la cuantificación. Una función proposicional cuantificada se transforma en proposición.

CUANTIFICADORES

Mediante un proceso llamado **cuantificación** se puede, a partir de funciones proposicionales, obtener proposiciones generales.

Existen dos símbolos asociados a la indeterminada x : $\forall(x)$: $\exists(x)$ llamados cuantificador universal y existencial respectivamente.

$\forall$ (para todo) Cuantificador universal.

$\exists$ (existe al menos uno) cuantificador existencial.

$\exists!$ (existe un único) cuantificador existencial.

Entonces se tiene:

$\forall x : P(x)$ Significa “Para todo x se verifica $P(x)$ ”.

$\exists(x) / P(x)$ Significa “existe al menos un x , tal que se verifica $P(x)$ ”.

$\exists!(x) / P(x)$ Significa “Existe un único x , tal que se verifica $P(x)$ ”.

La función proposicional quedó cuantificada universalmente en el primer caso y existencialmente en los otros dos, convirtiéndose en una proposición general.

Ejemplo: $x \in N$; $P(x)$: x es primo (función proposicional).

- **Se cuantifica universalmente:**

$\forall x \in N$: x es primo (proposición general F) para que sea verdadera, deben ser verdaderas todas las proposiciones particulares asociadas a ellas.

La cuantificación universal hace referencia a “todos” los números naturales, es decir que todos los números naturales, sin excepción de ninguno, son primos, lo cual no es cierto, por lo tanto, en este caso la proposición dada es falso.

- **Se cuantifica existencialmente.**

$\exists x \in \mathbb{N} / x$ es primo (proposición general $\forall$) basta para que sea verdadera que por lo menos una de las proposiciones particulares asociadas a ella sea verdadera.

La cuantificación existencial, como en este caso, hace referencia a la existencia de al “menos un” número natural que sea primo, sin importar si existen más de uno, insistiendo en que importa que exista por lo menos uno, lo cual es cierto, por lo tanto la proposición dada es verdadera.

La negación de una proposición cuantificada universalmente da como resultado una proposición cuantificada existencialmente.

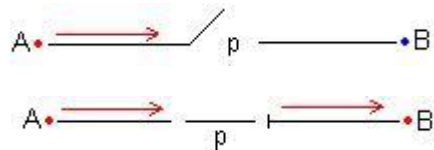
$$\sim[\forall x : P(x)] \Leftrightarrow [\exists x / \sim P(x)]$$

La negación de una cuantificación existencial da por resultado una proposición cuantificada universalmente.

$$\sim[\exists x / P(x)] \Leftrightarrow [\forall x : \sim P(x)]$$

CIRCUITOS LÓGICOS

Como puede observarse en el esquema de un circuito eléctrico, como los siguientes:



Cuando el interruptor p está abierto, la electricidad que fluye desde A no llega a B.

Cuando el interruptor p está cerrado, como en el segundo diagrama, la electricidad fluye de A a B, recorriendo el circuito.

Existen dos tipos de circuitos: **circuitos en serie** y **circuitos en paralelo**.

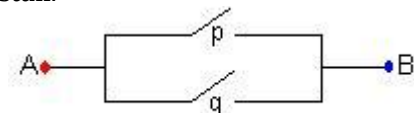
- **Circuitos en Serie:**



El circuito representado por el diagrama anterior muestra dos interruptores, p y q, conectados **en serie**, es decir, dispuestos de forma tal que **la corriente pasa** de un polo A al otro B **sólo si ambos interruptores están cerrados**.

Circuitos en paralelo:

Este tipo de circuito presenta dos interruptores, p y q conectados **en paralelos**, es decir, dispuestos en forma tal que **la corriente pasa** de un polo a al otro sólo **si uno de los interruptores está cerrado o bien si ambos lo están**.

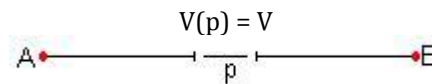


Se puede decir también, como es lógico, que si ambos interruptores están abiertos la corriente no circula.

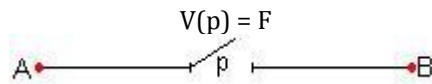
Circuitos lógicos y tablas de verdad

Dado un circuito eléctrico, se considera un interruptor asociado a una proposición p, de forma tal que:

- El interruptor deja pasar la corriente, sólo si la proposición asociada es verdadera.



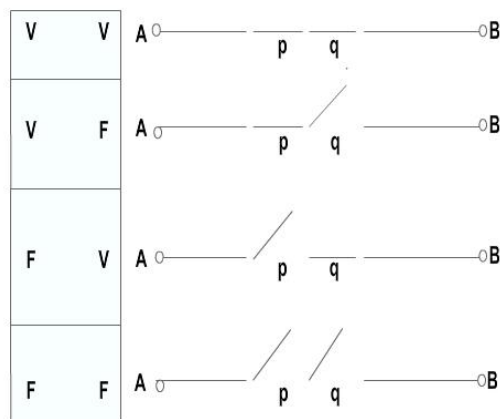
- El interruptor no deja pasar la corriente si la proposición asociada es falsa.



Observando los tipos de circuito puede observarse en cada caso lo siguiente:

- Si se tiene dos proposiciones p y q en el circuito en serie, para que la corriente fluya, ambos interruptores deben estar cerrados, es decir, debe dejar pasar la corriente en ambos casos por lo que el valor de verdad de las dos proposiciones deben ser necesariamente verdaderas. Si los valores de verdad de las proposiciones son ambas falsas o distintas, el circuito no cierra.

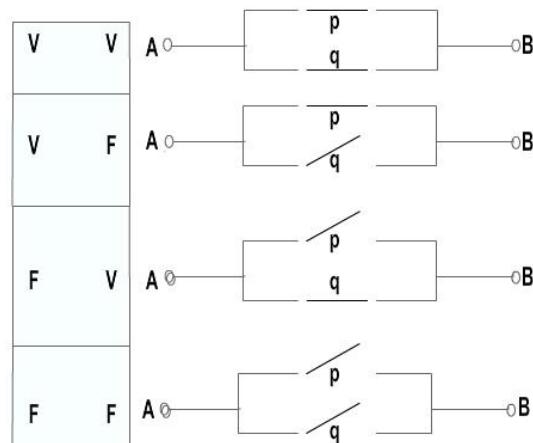
Analizando los siguientes diagramas correspondientes a lo propuesto, se tiene:



Si se observa la tabla de la izquierda, correspondiente a los valores de verdad de cada par de proposiciones en cada caso, puede verse el único caso en que la corriente pasa desde A hasta B es cuando ambas proposiciones son verdaderas.

- En el caso de dos proposiciones, p y q , colocados en un circuito en paralelo, sucede que para dejar pasar la corriente uno de los interruptores, o bien los dos, debe estar cerrado, es decir que los valores de verdad de las proposiciones asociadas pueden ser distintas o bien ambas verdaderas ya que si las dos proposiciones son falsas, la corriente no pasa.

Analizando los siguientes diagramas correspondientes a lo propuesto, se tiene:



Si se observa la tabla de la izquierda, correspondiente a los valores de verdad de cada par de proposiciones en cada caso, puede verse que el único caso en que el circuito no cierra totalmente es en el caso en que las dos proposiciones son falsas.

De este modo es fácil observar que el circuito en serie corresponde a la conjunción de proposiciones y el circuito en paralelo a la disyunción de proposiciones.

Se puede analizar también otros casos, como la implicación, la doble implicación y la diferencia simétrica de dos proposiciones, de la siguiente manera.

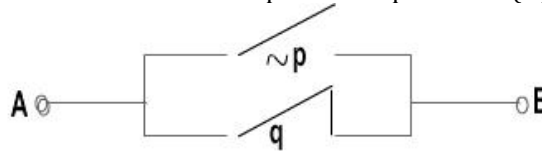
- Implicación material:

Para construir el circuito lógico que representa a esta proposición se tiene en cuenta la equivalencia de las siguientes expresiones:

Si se dice “si p entonces q”, se está diciendo que “no es posible se cumpla p y no q” o bien “no se cumple p o se cumple q” (esta equivalencia resulta de aplicar la segunda ley de De Morgan).

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$$

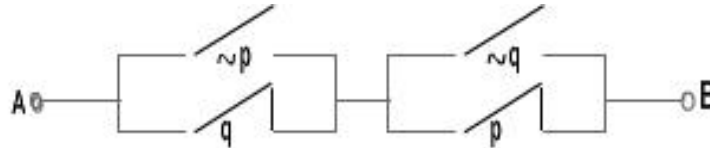
Para la construcción del circuito se toma la operación equivalente $(\sim p \vee q)$



- Doble implicación

La doble implicación es equivalente a la conjunción de dos implicaciones.

$$(p \Leftrightarrow q) \cong (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \cong (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$$



- Disyunción exclusiva

Al decir “o p o q” se está diciendo que “debe cumplirse p y no cumplirse q” o bien “no debe cumplirse p y debe cumplirse q”.

$$(p \veebar q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$$

