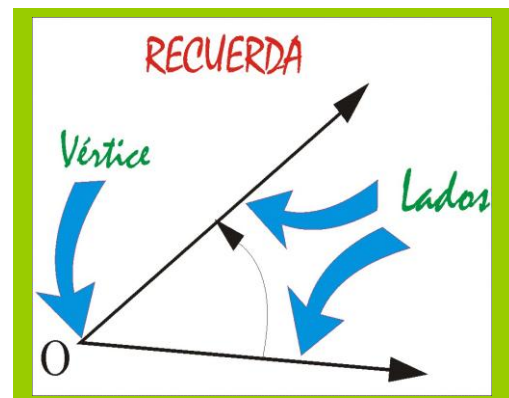
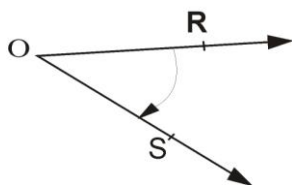
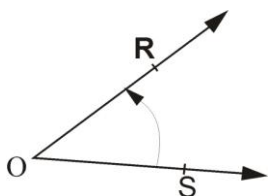


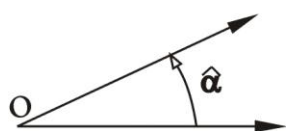
ÁNGULOS ORIENTADOS

Se llama *ángulo orientado* $\widehat{ROS}$ al ángulo generado por la rotación de la semirrecta $\overrightarrow{OR}$ a la posición de la semirrecta $\overrightarrow{OS}$.

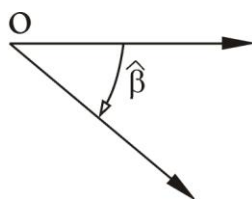


POR CONVENCIÓN:

Se considera ángulo positivo al que gira en sentido contrario al sentido del giro de las agujas del reloj, y negativo en caso contrario. Se denomina también *sentido horario* o *antihorario* en cada caso.



$$\alpha = +25^\circ$$

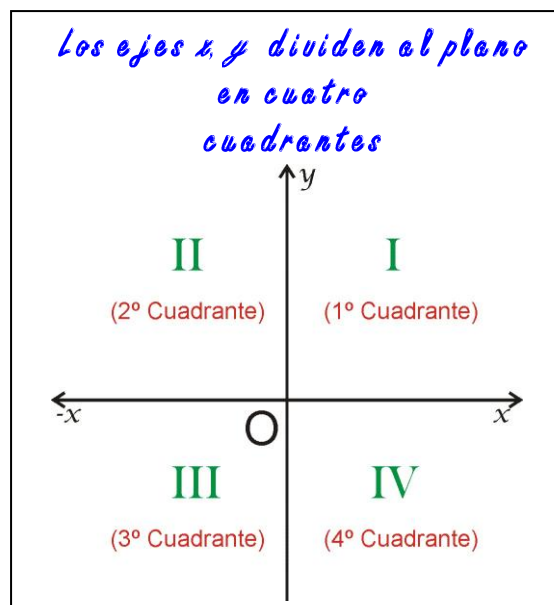
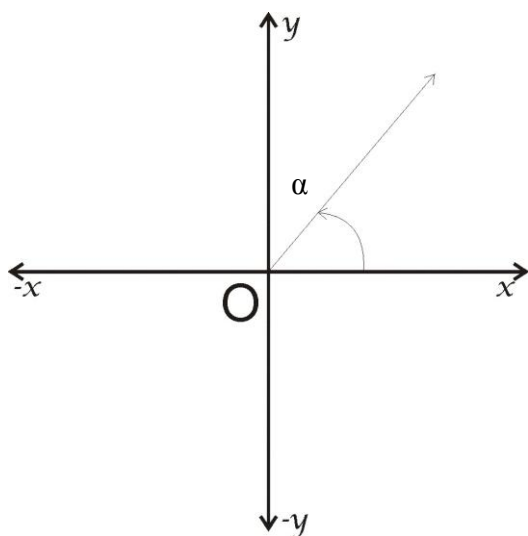


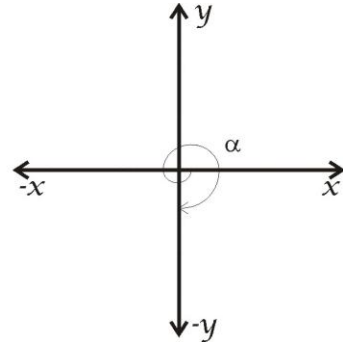
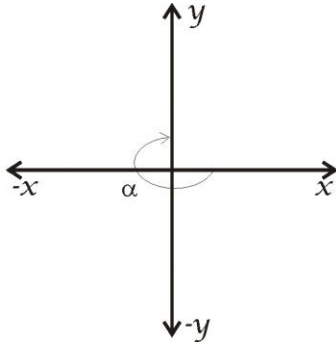
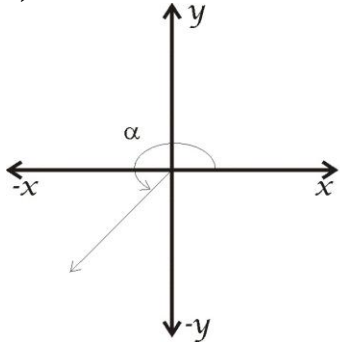
$$\beta = -40^\circ$$

Los ángulos se nombran con letras griegas como $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

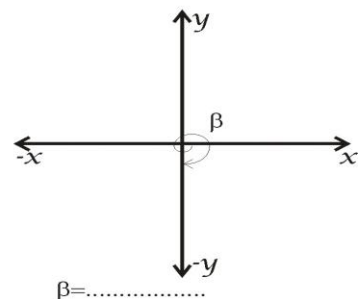
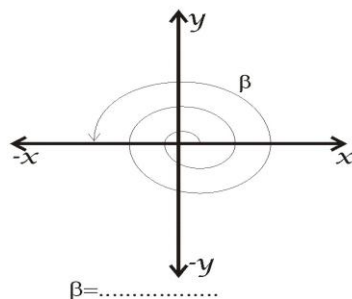
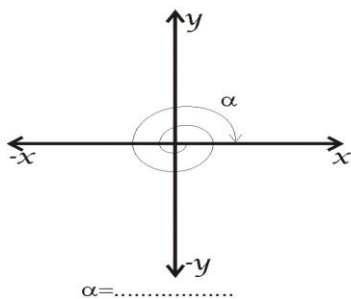
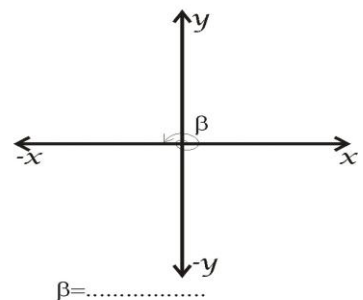
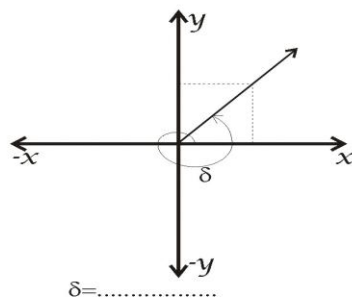
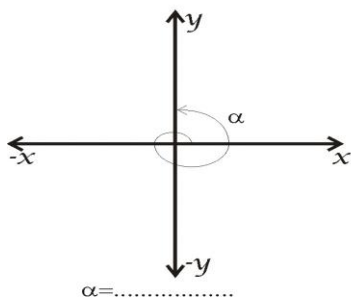
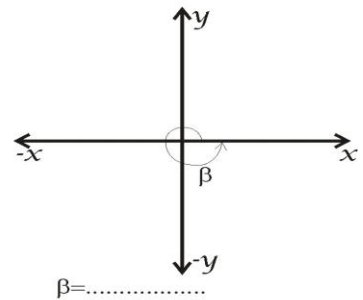
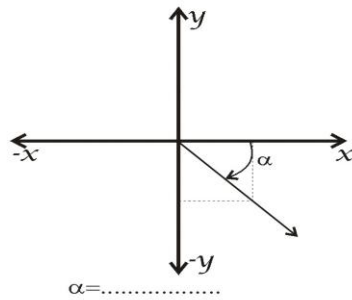
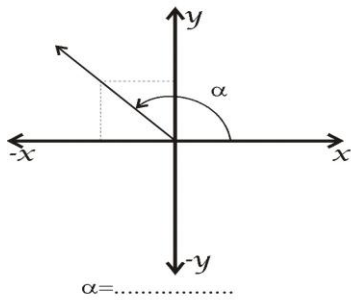
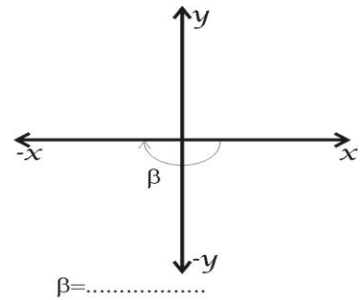
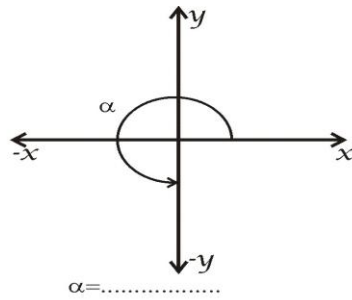
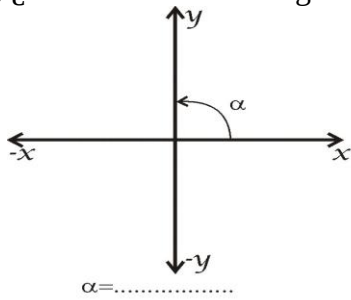
ÁNGULOS CENTRADOS

Se llama *ángulo centrado* a todo ángulo orientado con vértice O que coincida con el origen de un sistema de ejes cartesianos.



ACTIVIDAD Ia) Indicar en cada caso el signo de α 

b) ¿Cuánto mide cada ángulo?



SISTEMAS DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

SISTEMA SEXAGESIMAL:

Su unidad de medida es el *grado sexagesimal* (1°) y se obtiene dividiendo al ángulo recto en 90 partes congruentes.

$$1^\circ = 1R / 90 \Rightarrow 1R = 90^\circ$$

Submúltiplos:

- Minuto Sexagesimal ($1'$)

$$1' = 1^\circ / 60 \Rightarrow 1^\circ = 60'$$

- Segundo Sexagesimal ($1''$)

$$1'' = 1' / 60 \Rightarrow 1' = 60''$$

En ocasiones se necesita expresar un ángulo sólo en grados, en minutos o en segundos; para ello se debe tener en cuenta las igualdades anteriores y realizar una regla de tres simple.

Ejemplo:

Expresar $12^\circ 6'$ en minutos.

$$\begin{array}{l} 1^\circ \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad 60' \\ 12^\circ \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad X \Rightarrow X = 12^\circ \cdot 60' / 1^\circ = 720' \end{array}$$

Se tiene que $12^\circ = 720'$. Sumando los $6'$ restantes se tiene que:

$$12^\circ 6' = 726'$$

ACTIVIDAD II

a) Responder.

- ¿A cuántos minutos equivalen 10° ?
- ¿Cuántos segundos sexagesimales equivale 1° ?
- ¿Cuál es la amplitud de un ángulo recto si se toma como unidad de medida el minuto sexagesimal?
- ¿Cuánto giro es el equivalente a $648000''$?
- Si la amplitud de $\alpha = 15^\circ 20''$. ¿Cuál es la amplitud de α expresada en segundos?

b) Indicar V o F.

- $13^\circ 6' = 756'$
- $5,2^\circ = 302'$
- $20' 52'' = 1252''$
- $52^\circ 36' = 3120,6''$
- $1965' = 32,45^\circ$
- $546'' = 10,75'$
- $36912'' = 10^\circ 15' 12''$

c) Calcular α en cada caso

- $90^\circ + \alpha = 150^\circ$
- $15^\circ 20' = \alpha - 30'$
- $\alpha + 30' 15'' = 60^\circ$
- $180^\circ - \alpha = 96^\circ$
- $1 \text{ giro} + \alpha = 1620000''$
- $365^\circ 15' + \alpha = 365^\circ$
- $90^\circ \cdot \alpha = 180^\circ$
- $360^\circ 15' \cdot \alpha = 90^\circ$
- $\alpha \cdot 12^\circ 15' 30'' = 30^\circ$
- $\alpha \cdot 5 = 1800^\circ$

SISTEMA CENTESIMAL:

Su unidad de medida es el *grado centesimal* o *gradé* (1^G) y se obtiene dividiendo al ángulo recto en 100 partes congruentes.

$$1^G = 1R / 100 \Rightarrow 1R = 100^G$$

Submúltiplos:

- Minuto centesimal (1^M)

$$1^M = 1^G / 100 \Rightarrow 1^G = 100^M$$

- Segundo centesimal (1^S)

$$1^S = 1^M / 100 \Rightarrow 1^M = 100^S$$

Al igual que en el sistema sexagesimal, para pasar a gradé, minutos o segundos centesimales un ángulo, sólo se debe hacer la regla de tres con las igualdades del sistema.

Un método práctico consiste en dividir los grados minutos y segundos por las potencias de 100.

Ejemplo:

Expresar en gradé $\alpha = 30^G 45^M 30^S$

Primero se debe pasar los minutos y segundos a gradé.

Se pasa 45^M a gradé dividiendo a 45 por 100:

$$45 / 100 = 0,45 \Rightarrow 45^M = 0,45^G$$

Para pasar 30^S a gradé se debe dividir 30 por $100^2 = 10000$

$$30 / 10000 = 0,003 \Rightarrow 30^S = 0,003^G$$

Una vez expresados los minutos y segundos en gradé, se suma y se obtiene lo pedido

$$30^G + 0,45^G + 0,003^G = 30,453^G$$

que es el ángulo dado expresado en gradé.

ACTIVIDAD III

a) Responder

- ¿Cuál es la amplitud de un ángulo llano expresada en minutos centesimales?
- ¿A cuántos segundos centesimales equivale un gradé?
- ¿Se puede obtener el equivalente en gradé del ángulo $43^G 70^M 52^S$?
- Si $\alpha = -5478^M$. ¿Cuántos gradé mide? ¿A qué cuadrante corresponde?

b) Completar:

- $527^G = \dots\dots\dots^M$
- $78^G 09^M = \dots\dots\dots^S$
- $2004^M = \dots\dots\dots^G$
- $9^G = \dots\dots\dots^S$
- $48^G 20^M 30^S = \dots\dots\dots^G$

c) calcular α en cada caso

- $100^G + \alpha = 256^G 20^M$
- $36^G 20^M + \alpha = 15^G$
- $\alpha - 40^G 20^M = 32^G 21^M 15^S$

SISTEMA HORARIO

Su unidad de medida es el ángulo de una hora (1h), que equivale a la sexta parte del ángulo recto.

$$1^h = 1R / 6 \Rightarrow 1R = 6^h$$

Submúltiplos:

- Minuto horario (1m)

$$1^m = 1^h / 60 \Rightarrow 1^h = 60^m$$

- Segundo horario (1s)

$$1^s = 1^m / 60 \Rightarrow 1^m = 60^s$$

En el sistema horario, al igual que en los sistemas anteriores, se puede expresar un ángulo sólo en horas, minutos o segundos.

Ejemplo:

Expresar $2^h 30^m 15^s$ en horas.

Se pasan los minutos a horas.

$$\begin{array}{r} 60^m \underline{\hspace{1cm}} 1^h \\ 30^m \underline{\hspace{1cm}} X = 0,5^h \end{array}$$

Se pasan los segundos a horas. Para ello se pasa a los segundos a minutos

$$\begin{array}{r} 60^s \underline{\hspace{1cm}} 1^m \\ 15^s \underline{\hspace{1cm}} X = 0,25^m \end{array}$$

Luego se pasan $0,25^m$ obtenidos a horas

$$\begin{array}{r} 60^m \underline{\hspace{1cm}} 1^h \\ 0,25^m \underline{\hspace{1cm}} X = 0,00416^h \end{array}$$

Se suman los valores obtenidos y se obtiene:

$$2^h 30^m 15^s = 2^h + 0,5^h + 0,00416^h = 2,50416^h. \text{ por lo tanto:}$$

$$\mathbf{2^h 30^m 15^s = 2,50416^h}$$

ACTIVIDAD IV

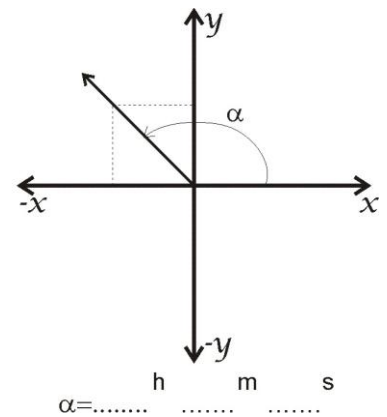
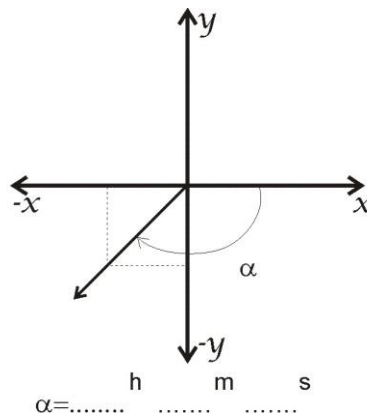
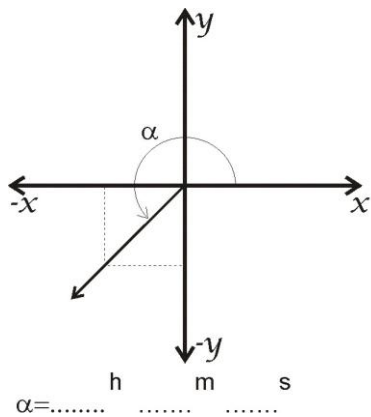
a) Responder:

- ¿Cuántos minutos equivalen una hora y media?
- ¿Cuántos segundos tiene un minuto? ¿Y 60^m ?
- ¿Cuántos segundos tiene 3^h ?
- ¿Cuántas horas tiene medio giro de un ángulo centrado?
- ¿A cuántas horas equivale un ángulo de un giro?

b) Indicar V o F

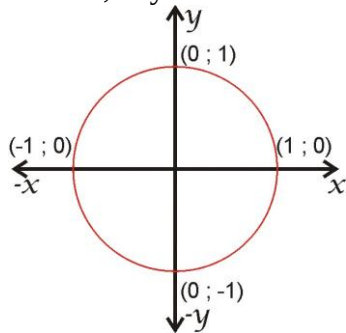
- $2^h 30^m = 2,3^h$
- $52^m 10^s = 3120^s$
- $14^h 20^s = 840,33^m$
- $4728^s = 1^h 19^m 48^s$
- $240,36^m = 4^h 36^m$

c) expresar α en horas, minutos y segundos



SISTEMA CIRCULAR

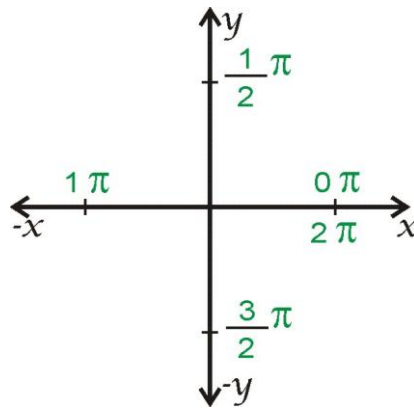
Para trabajar en el sistema circular, se toma una circunferencia de radio igual a una unidad, es decir $R = 1$, cuyo centro coincide con el del sistema de ejes cartesianos.



Se tiene en cuenta que:

$$2R = 1\pi \Rightarrow 1R = \pi / 2$$

Así se tiene, considerando el sentido del giro positivo:



Donde se puede observar las siguientes equivalencias entre los sistemas de medición de ángulos:

$$1R = \frac{1}{2} \pi = 90^\circ = 100^G$$

De igual manera:

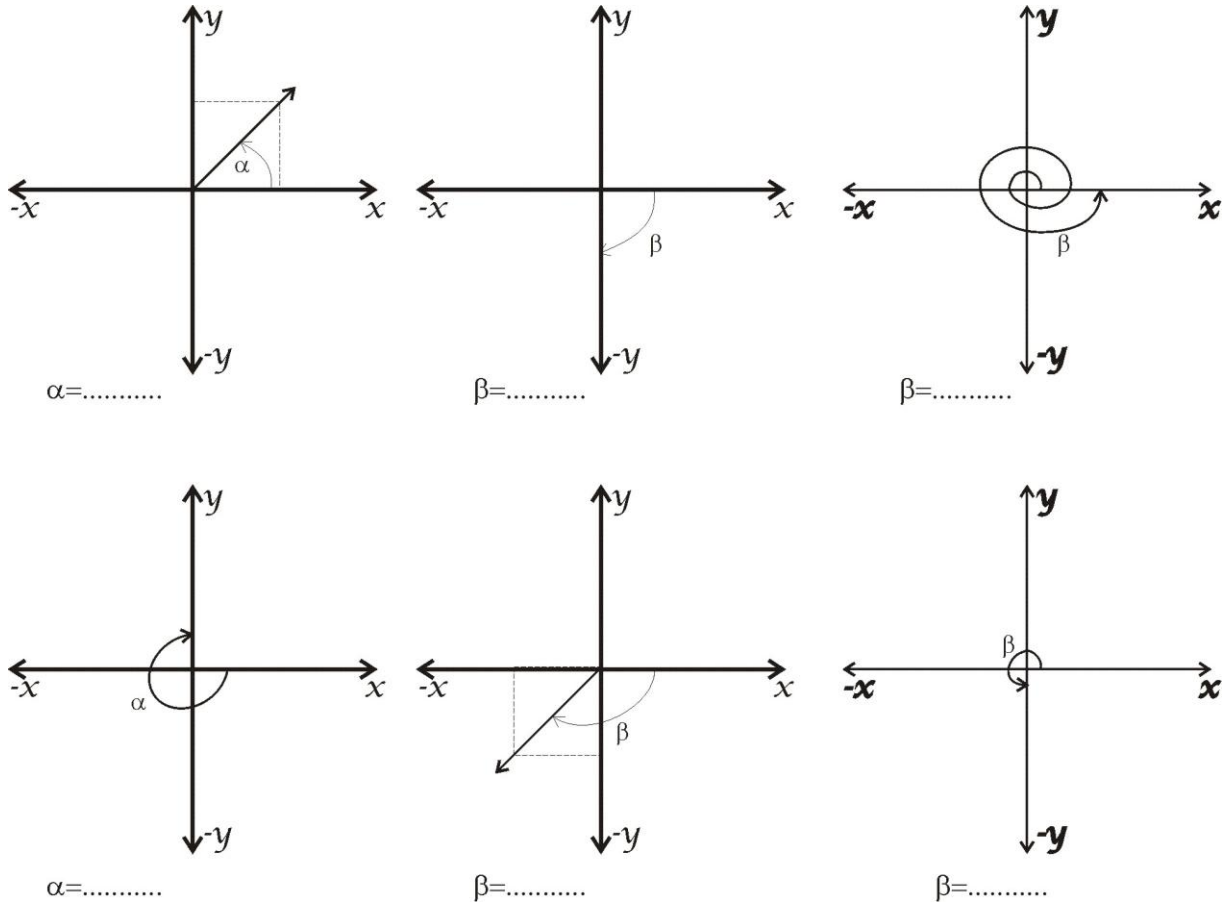
$$2R = \pi = 180^\circ = 200^G$$

ACTIVIDAD V

a) Responder:

- ¿A cuántos π equivale un giro?
- ¿Cuántos grados sexagesimales representa $\frac{1}{2} \pi$?
- Un ángulo llano, ¿mide 2π ?

b) Qué amplitud, expresada en el sistema circular, tiene cada ángulo?

c) Calcular α en cada caso

- $2\pi + 5\alpha = 17\pi$
- $3\alpha - 9\pi = 27\pi$
- $\alpha 2 \div 5\pi = 5\pi$

CONVERSIÓN DE UNIDADES

Consiste en expresar una unidad dada en un sistema a otro, cuyo ángulo es congruente. Para ello, se debe tener en cuenta la siguiente equivalencia entre los sistemas de medición de ángulos.

$$2R = 1\pi = 180^\circ = 200^G = 12^h$$

Ejemplos:

1) Expresar en el sistema centesimal el ángulo $\alpha = 260^\circ$.

Haciendo la regla de tres simple se tiene:

$$\begin{array}{l} 180^\circ \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad 200^G \\ 260^\circ \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad x = 260 \cdot 200 / 180 = 288,88^G \end{array}$$

Luego $288,88^G = 288^G 88^M 8,8^S$; entonces será

$$260^\circ = 288^G 88^M 8,8^S$$

2) Expresar 15° en horas y en el sistema circular.

$$\begin{array}{l} 180^\circ \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad 12^h \\ 15^\circ \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad x = 15 \cdot 12 / 180 = 1^h \Rightarrow 15^\circ = 1^h \end{array}$$

Luego en el sistema circular se tiene:

$$\begin{array}{l} 180^\circ \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad 1\pi \\ 15^\circ \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad x = 15 \cdot 1\pi / 180 = 0,0833\pi \end{array}$$

ACTIVIDAD VI

a)

- Expresar en sistema horario $\alpha = 30^\circ 20'$
- Convertir al sistema sexagesimal $180^G 20^M 40^S$
- ¿Cuántos rectos equivale $5^h 20^m 30^s$?

b) Completar

	Sexagesimal	Centesimal	Circular	Horario
α_1	36°			
α_2		120^G		
α_3			$\frac{3}{4} \pi$	
α_4				15^h
α_5			$\frac{7}{8} \pi$	
α_6	810°			
α_7		180^M		

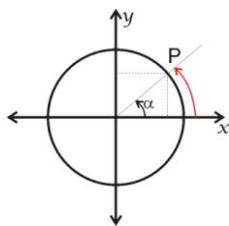
c) Ordenar de mayor a menor en cada caso

- $\alpha = 123^G 18^M 20^S$; $\beta = \frac{5}{8} \pi$; $\gamma = 148^\circ 27' 32''$
- $\alpha = 6^h 24^m$; $\beta = 106^G$; $\gamma = 95^\circ 50'$

d) calcular el valor de x

- $x = \pi / 3 + 90^G - 3 \cdot 25^\circ 18' 32''$
- $(2x + 5^\circ 18') / 2 = 25^G 10^M + 3^h$
- $15^G - 2\pi + x = 48^\circ$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS



Dado en el plano un sistema de coordenadas cartesianas perpendiculares, se considera una circunferencia de radio r con centro en el origen y un ángulo centrado α .

Se observa que α determina sobre la circunferencia un arco de extremo P. si P tiene coordenadas $(x ; y)$ se definen las funciones *seno* y *coseno* del ángulo α como:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{ordenada de P}}{\text{radio}} = \frac{y}{r}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{abscisa de P}}{\text{radio}} = \frac{x}{r}$$

Aclaración

Así como las funciones lineales, cuadráticas, cúbicas, etc. Dependien de la variable "x", tanto el seno y el coseno son funciones cuya variable es un ángulo; se dice entonces que ambos dependen únicamente de α .

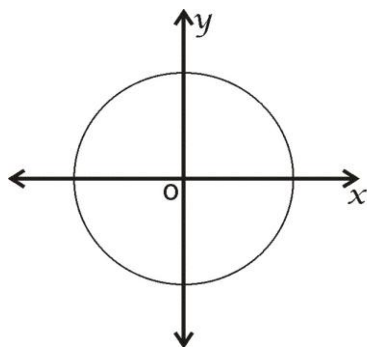
Como conclusión se tiene que la *función seno* es el cociente entre la ordenada del punto dado y el radio de la circunferencia; en cambio la *función coseno* es el cociente entre la coordenada x y el radio.

Para Aplicar

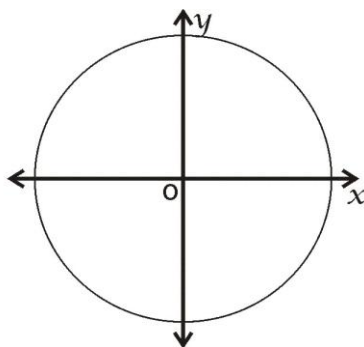
A

a)

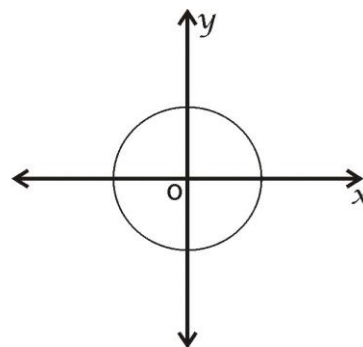
Construir en cada caso un ángulo centrado de 50° y obtener por medición $\text{sen } 50^\circ$ y $\text{cos } 50^\circ$.



$\text{sen } 50^\circ = \dots\dots\dots$
 $\text{cos } 50^\circ = \dots\dots\dots$



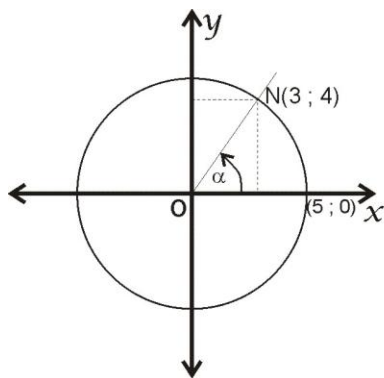
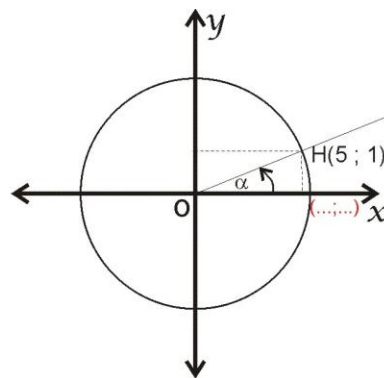
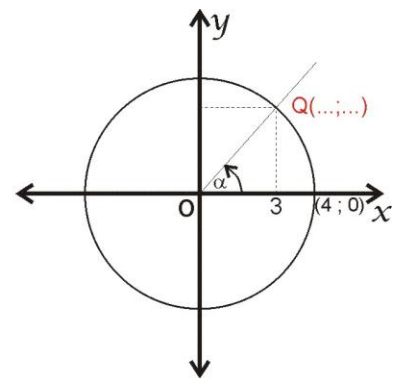
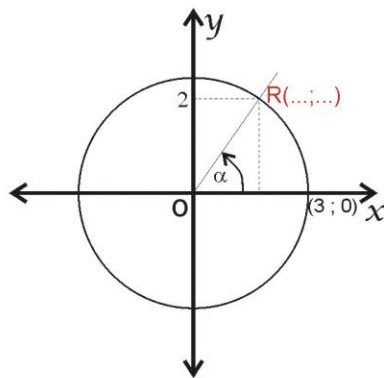
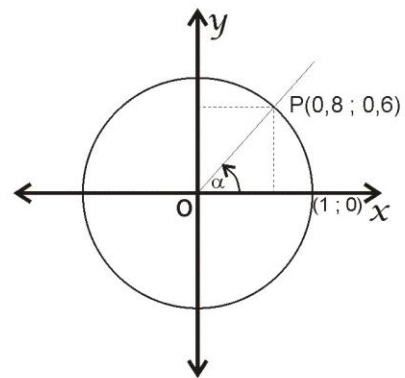
$\text{sen } 50^\circ = \dots\dots\dots$
 $\text{cos } 50^\circ = \dots\dots\dots$



$\text{sen } 50^\circ = \dots\dots\dots$
 $\text{cos } 50^\circ = \dots\dots\dots$

b)

Completar:

sen α =cos α =sen α =cos α =sen α =cos α =sen α =cos α =sen α =cos α =

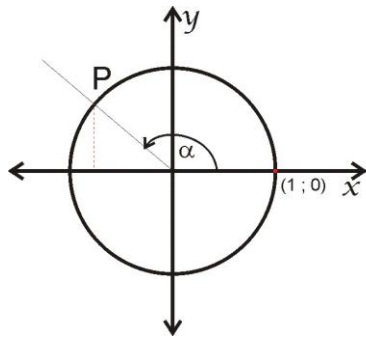
Si la circunferencia tiene radio igual a 1 resulta:

 $\text{Sen } \alpha = \text{ordenada de P}$

Si la circunferencia tiene radio igual a 1 resulta:

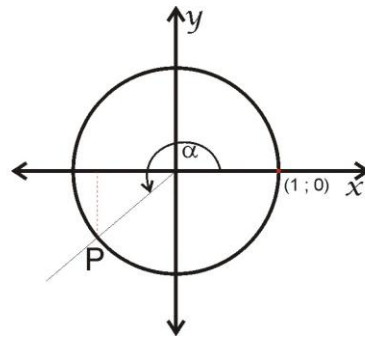
 $\text{Cos } \alpha = \dots\dots\dots$

c)

Analizar, en cada caso, el signo de $\sin \alpha$ y completar. α pertenece al 2º cuadrante

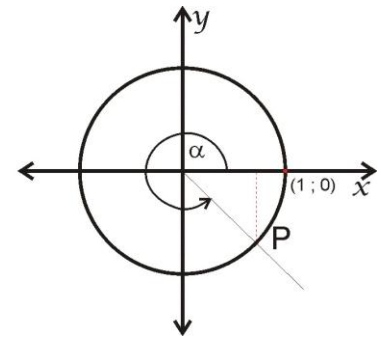
$$90^\circ < \alpha < 180^\circ$$

	Signo
Sen α	
Cos α	

 α pertenece al 3º cuadrante

$$\dots\dots\dots < \alpha < \dots\dots\dots$$

	Signo
Sen α	
Cos α	

 α pertenece al 4º cuadrante

$$\dots\dots\dots < \alpha < \dots\dots\dots$$

	Signo
Sen α	
Cos α	

d)

Probar que: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, siguiendo los pasos propuestos.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = (\dots\dots\dots)^2 + (\dots\dots\dots)^2 = \frac{\dots\dots\dots + \dots\dots\dots}{(\dots\dots\dots)^2} = \dots\dots\dots = 1$$

A la igualdad demostrada como consecuencia inmediata del teorema de Pitágoras se la conoce como “relación pitagórica”.